Programm

über

Plus und Minus,

als

Einladung zu den am 16. 17. und 18. August Statt findenden öffentlichen Prüfungen

der

Schüler des neuen Gymnasium.

Von

Philipp Weidner,

Professor der Mathematik.

München, 1831.

Mit Schriften des königlichen Central-Schulbücher-Verlages.

QA
41
.W45
1831

Ueber Plus und Minus.

Die Zeichen + und — wurden anfänglich bloß als Zeichen vorzunehmender Operationen, wo man diese nicht wirklich verrichten konnte, oder verrichten wollte, in die Algebra eingeführt. Beym Gebrauche dieser Zeichen nahm man aber bald Veranlassung, ihnen noch eine andere Bedeutung, nach der sie Eigenschaften der Zahlen ausdrücken sollten, vor denen sie vorhergingen, unterzulegen, und die sogenannten absurden Zahlen zu fingiren. In Folge dieser Fiction erhielt man die falschen Gleichungs-Wurzeln, welche später Bedeutung gewannen, und die Lehre von den positiven und negativen oder entgegengesetzten Größen veranlaßten.

Die Ausdrücke „wahre und absurde Zahlen, wahre und falsche Gleichungswurzeln (numeri veri, absurdi — radices falsae)“ kommen zuerst bey den Cossisten vor. Der Umstand, daß sie nach Descartes als gleichbedeutend mit positiven und negativen Zahlen und Gleichungswurzeln gebraucht werden, hat veranlaßt, daß man die Cossisten zu den Bekennern der Lehre von den entgegengesetzten Größen zählte. Aber zwischen den wahren und absurden Zahlen der Cossisten und den entgegengesetzten Größen Späterer ist ein großer Unterschied. Schon die Ausdrücke verrathen, daß ihre ursprüngliche Bedeutung eine ganz andere gewesen seyn müsse; und dieses finden wir bestätiget, wenn wir die Cossisten über die nähere Bedeutung ihrer Ausdrücke befragen.

Die Wahl eines Zeichens für die unbekannte Zahl, und die Verbindung derselben mit bekannten durch die Operationszeichen hatte die Nothwendigkeit veranlaßt, mit Summen und Differenzen, die man durch die Zeichen + und — bloß angezeigt hatte, von neuem Rechnungen vor-

zunehmen; so ward man auf Rechnungen, wie folgende, geführt, die aus Mich. Stifelii Arithmetica integra (Norimb. 1544) fol. 238 entnommen sind.

	6 ℨ + 8 ℭ		6 ℭℭ — 8 ℭ		8 ℭ + 0
(add.)	2 ℨ — 10 ℭ	(subtr.)	2 ℭℭ — 10 ℭ	(subtr.)	12 ℭ — 24
	8 ℨ — 2 ℭ		4 ℭℭ + 2 ℭ		24 — 4 ℭ

Um das hier befolgte mechanische Verfahren zu erläutern, wiederholt es Stifel fol. 249 in mehreren Beyspielen mit lauter bekannten Zahlen, und bemerkt dazu:

„Vides certe, ut haec omnia vanissimis nugis videantur esse simillima, et tamen Cossicae operationes, secundum ea factae, plane mirificas inventiones habent .... finguntur non frustra numeri infra 0, id est, infra nihil. Ut volo exemplum subtractionis positum superius repetere hoc:

8 — 2
10 — 5

3 — 2

Primo subtraho 10 de 8, et non invenio numerum aliquem supra 0, i. e. supra nihil, quem ponere possim justa subtractionis lege. Nam si ille, a quo debet fieri subtractio, esset major eo, qui subtrahitur (ut si loco numeri 8 poneretur numerus 12) tum tandem haberem numerum ponendum verum. Sic si ille numerus, a quo fieri debet subtractio, esset aequalis ei, qui subtrahitur (ut si loco 8 ponerentur 10) tunc relinqueretur 0, i. e. nihil, (quod mediat inter numeros veros et numeros absurdos). Jam vero cum numerus subtrahendus major sit eo, a quo fit subtractio, restat, ut numerus infra 0, id est, infra nihil ponatur, videlicet 0 — 2. Sic simili ratione postea subtraho 0 — 5 de 0 — 3, et invenio 0 + 3, i. e. numerum supra nihil, seu numerum verum."

„Sic Cossa solet, pro immensa copia sua, iis uti, quae sunt, et iis, quae finguntur esse" .....

Denkt man dazu an den Grundsatz, den der Cossist fol. 8 ausspricht: permittendum esse Arithmeticis, ut dum bona ratione et utili consilio aliquid fingunt, uti possint hujusmodi rebus fictis, so ist klar, daß die absurden Zahlen bloße Fictionen sind; daß der Cossist diese Fictionen bloß Behufs des mechanischen Verfahrens macht, daß er zwar so verfährt, als ob + und — Merkmale der Zahlen ausdrückten, aber nur während der Rechnung; denn, daß er im Resultate — wieder als Operationszeichen genommen wissen wolle, zeigt der Umstand deutlich, daß er nicht — 2 + 3, sondern 3 — 2 hinsetzt.

Die Fiction der absurden Zahlen und die Rechnung damit führte nothwendig auf eine Mehrdeutigkeit der geraden Wurzeln; es wurde aber diese Mehrdeutigkeit Anfangs nur dann beachtet, wenn sich auf keinen Fall eine absurde Zahl als Endresultat ergab, wie dieß aus folgender Bemerkung des Cossisten zur Gleichung

1 ☉ sit aequatus 18 ☌ — 72,

deren Wurzeln 12 und 6 sind, hervorgeht:

„Sic quoties 1 ☉ aequatur numero radicum, posito cum numero absoluto, mediante signo subtractorum, tunc semper (uno solummodo casu excepto) habebit aequatio duplicem radicem. Aliis vero casibus impossibile est“ ..... fol. 243. — Man vergl. fol. 278.

Selbst als man angefangen hatte die Mehrdeutigkeit gerader Wurzeln auch in anderen Fällen zu beachten, und die negativen Wurzeln mit aufzuführen, war man doch weit entfernt, solchen Wurzeln einen Sinn beyzulegen, und nannte sie daher falsche Wurzeln. Cardan war der erste, der sie angab, machte aber durchaus keinen Gebrauch davon. Wie Cardan betrachtete auch Viète die falschen Gleichungswurzeln; er legte ihnen durchaus keine Bedeutung bey, selbst da nicht, wo er die Algebra auf die Geometrie anwendete. Deßgleichen Harriot.

Descartes gebraucht zwar in seiner Geometrie noch den Ausdruck „falsche Wurzeln“; aber bey ihm ist dieser Ausdruck nicht mehr in seiner wörtlichen Bedeutung, sondern als technischer Ausdruck zu nehmen; denn er läßt die falschen Wurzeln keineswegs weg als solche, auf die man bey Auflösung einer Gleichung keine Rücksicht zu nehmen hätte, sondern er betrachtet sie als eben so reel, als die wahren (caeterum radices tam verae quam falsae non semper sunt reales, sed aliquando tantum imaginariae. — Lib. II. pag. 76 der Schootenschen Übersetzung), und zeigt sogar ihre Construction S. 86 und a. a. O.

Über dieser beobachteten Übereinstimmung der Geometrie mit den mehrdeutigen Resultaten der Algebra vergaß man ganz den Grund, auf dem jene Vieldeutigkeit beruhte. Diese Übereinstimmung kann in vielen Fällen Statt finden, aber im Allgemeinen findet sie nicht Statt. Gerade in den Fällen, in welchen man der Geometrie, nachdem man sie auf den Triumpfwagen der Algebra erhoben hatte, zuerst zumuthete, die mehrdeutigen Orakelsprüche derselben zu bestätigen, zeigte sie sich dazu am willfährigsten; desto widerspänstiger wurde sie, als man dieß in der Folge in allen Fällen von ihr verlangte.

Außer diesem Gebrauche von den Zeichen + und — in den Gleichungswurzeln wird von Descartes noch ein anderer von denselben gemacht; er bemerkte nämlich, daß die Gleichungen mehrerer einzelner Fälle einer allgemeinern Aufgabe sich nur durch diese Zeichen in einigen Glie-

dern der Gleichung unterschieden, und daß die Gleichung für irgend einen Fall für die übrigen Fälle durch eine bloße Änderung dieser Zeichen in einigen Gliedern brauchbar gemacht werden könne. Dadurch kann man eine Formel für eine Menge von Fällen benützen, und eine lästige Wiederholung der Rechnungen ersparen. Man vermißt aber bey Descartes Gründe und Regeln für eine solche Übertragung der Formeln von einem Falle auf die übrigen. Damit, was er im II. Buche S. 59 der Schootenschen Übersetzung darüber sagt, ist nichts gedient.

Diese neuen Lehren, von Descartes verkündet, von andern mit Beyfall aufgenommen, lieferten überraschende Resultate. Aber zu begierig, ihre Anwendung zu vervielfältigen, unterließ man, ihren Gründen nachzuspüren. Je mehr sich aber durch die zahlreichen Anwendungen das Material häufte, und je willkührlicher man aus Mangel an festen Anhaltspuncten öfter verfahren war, desto schwerer wurde es in der Folge, das Fehlerhafte auszuscheiden, das Willkührliche zu regeln, und eine feste Grundlage zu gewinnen.

Erst in der zweyten Hälfte des vorigen Jahrhunderts machten, Lambert in seinem Briefwechsel IV. B. S. 393 (vergl. Karsten's math. Abhandl. III. Über eine Stelle in Lambert's Briefwechsel) und vorzüglich d'Alembert in einer Abhandlung „Sur les quantités négatives" im 8ten Bande seiner Opuscules mathématiques pag. 270, auf diesen Mangel aufmerksam. Wenn auch d'Alembert seine Untersuchungen über diesen Gegenstand endigte, ohne darüber in's Reine gekommen zu seyn, so gaben doch seine Zweifel nicht bloß Stoff zu nähern (Fr. Mallet — de negatione quantitatum geometricarum V. Nova acta soc. Upsal. Vol. V. pag. 145), sondern auch Veranlassung zu umfassendern Untersuchungen; höchst wahrscheinlich verdanken wir Carnot's Meisterwerk (Géométrie de Position) den d'Alembertischen Zweifeln.

Seit den letzten Jahren des vorigen Jahrhunderts wurde diesem Gegenstande mehr Aufmerksamkeit zugewandt. Es erschien Klügel's Abhandlung über die Lehre von den entgegengesetzten Größen im Hindenburgischen Archiv d. r. u. a. Math. 1795. Seine Ansichten wurden vorzüglich durch sein Wörterbuch sehr verbreitet. Von 1798 bis in die neueste Zeit führte Fr. G. Busse in verschiedenen Schriften, besonders in seinen „Neuen Erörterungen über Plus und Minus 1801" Klügel's Lehre von den verwandten Aufgaben bestreitend seine Richtungs-Theorie durch. Im Jahre 1801 theilte Carnot seine Correlations-Methode mit, die mit Klügel's Lehre von den verwandten Aufgaben sehr übereinstimmt. Seine Géométrie de Position 1803 enthält die ausführlichsten Erläuterungen und eine Menge der lehrreichsten Beyspiele.

Klügel berücksichtiget keinen Gegensatz verschiedener Größen in einem einzelnen Falle, sondern nur einen Gegensatz gleichnamiger Größen in verschiedenen Fällen. Carnot unter-

scheidet sich von Klügel hauptsächlich nur in den Ausdrücken. Klügel und Carnot stimmen darin überein, daß durch die Vieldeutigkeit der algebraischen Formeln keineswegs mehrere Fälle einer vorgelegten Aufgabe unmittelbar beantwortet werden, sondern daß diese Formeln zu solchem Zwecke erst einige Modificationen erleiden müssen. Bey Klügel und Carnot sind a, b, x absolute Zahlen. Busse dagegen statuirt einen Gegensatz verschiedener Größen auch im einzelnen Falle; die mehrdeutigen Resultate der Algebra sind ihm unmittelbar brauchbare Werthe der gesuchten Größe, die eben sowohl, als die bekannten Größen ein $(+x)$, als auch ein $(-x)$ seyn kann.

Wenn man auch Busse's Ansichten nicht theilen kann, so muß man doch gestehen, daß er sein System mit vieler Consequenz durchführte. Carnot's Werk ist selbst von seinen Gegnern sehr geschätzt worden, und Busse's „Vergleichung zwischen Carnot's und seiner Algebra 1804" ist nicht sehr zum Nachtheile der ersteren ausgefallen.

Da und dort gingen nach und nach die Ansichten dieser Männer in die Lehrbücher der Mathematik über; aber in den meisten unserer Elementarwerke wird den Zeichen + und — keine, oder nur eine sehr geringe Aufmerksamkeit geschenkt. Gegen die Verwirrung bringende Einführung der entgengesetzten Größen in den Unterricht von den arithmetischen Speciebus hat, wie es scheint, Klügel vergebens gewarnt. Von den sogenannten negativen Gleichungswurzeln macht man nach Laune bald Gebrauch, bald keinen. Vom + und — der trigonometrischen Linien wird größtentheils ohne alle Erläuterung Gebrauch gemacht u. dgl.

Die Theorie dieser Zeichen hat allerdings eigenthümliche Schwierigkeiten, wenn man sich damit nach dem Grade der geistigen Reife der Schüler richten muß, und es ist eben nicht leicht, zu bestimmen, was, und wie es jedesmal zweckmäßig hervorzuheben ist; um so nothwendiger aber ist es, daß man diesem Gegenstande seine Aufmerksamkeit zuwende. Wenn ich es wage, hier meine Meinung auszusprechen, so glaube ich es mir dabey zum Grundsatze machen zu müssen, Abstractionen, denen zu folgen dem Verstande der Schüler zu schwer werden dürfte, eben so sorgfältig zu vermeiden, als versinnlichende Bilder, die nur geignet sind, Mißverständnisse zu erregen.

Durch die Ordnung, in welcher nach den neuesten Vorschriften die Mathematik an den Gymnasien gelehrt werden soll, bin ich veranlaßt, meine Bemerkungen über + und — zuerst in der Buchstaben-Rechnung, dann in der Lehre von den einfachen Gleichungen, Potenzen, Wurzeln, quadratischen Gleichungen zu machen; weiters von der Übertragung einer Formel für einen Fall einer allgemeinern Aufgabe auf andere Fälle derselben zu sprechen, und darauf das + und — der trigonometrischen Linien zu gründen.

A.

Die Hauptsache bey aller Erkenntniß der Größen kommt darauf an, ihre gegenseitige Beziehung und Abhängigkeit zu bestimmen. Will man das Gesetz einsehen, nach welchem die die Quantität der Größen ausdrückenden Zahlen zusammenhängen; die Regel, nach der aus einigen von ihnen die andern abgeleitet werden können, so werden dazu bestimmte Begriffe von Zahlenverknüpfungen und Regeln ihrer Bildung erfordert. Sind die möglichen Verknüpfungsarten der Zahlen aufgesucht, und ist die Regel ihrer Bildung dargestellt, so wird man dann die verschiedenen gegenseitigen Beziehungen der Größen durch die verschiedenen Verknüpfungen der ihre Quantität bezeichnenden Zahlen ausdrücken, und ihr Dependenz-Gesetz angeben können. Nur die einfachsten dieser Verknüpfungsarten sind es, welche die Buchstabenrechnung behandelt; sie hat es also nicht mit Größen, also auch nicht mit entgegengesetzten Größen, sondern nur mit Zahlen, mit absoluten Zahlen zu thun.

Obschon aber die Buchstabenrechnung ihrem Objecte nach nichts mit entgegengesetzten Größen zu schaffen hat, so könnte man doch für gut finden, diese als Versinnlichungsmittel von Operationen, die mit Zahlen vorgenommen werden können, zu benützen. Allein auf der einen Seite wird die scheinbar größere Anschaulichkeit, die dadurch in die Grundoperationen kommt, stark überboten von den Mißverständnissen, die man in eben dem Grade veranlaßt, in dem man versinnlicht, und von der Oberflächlichkeit, zu der man sich in der Folge verurtheilt findet; auf der andern Seite sind, wenn man nur nicht gleich Anfangs von mehr abstracten Begriffen ausgeht, als eben die Noth erfordert, die Operationen, die man durch entgegengesetzte Größen zu versinnlichen pflegt, keineswegs von der Art, daß die Einsicht der Gründe, auf denen sie beruhen, einen allzu hohen Grad von Abstraction erforderte, und dadurch zu solchen Bildern nöthigte; sondern, so einfach, als die Operationen, sind auch die Gründe, auf denen sie beruhen. Wozu also die Operationen durch das färbende, trübende Medium entgegengesetzter Größen betrachten, wenn man sie so leicht unmittelbar betrachten kann?

Von entgegengesetzten Größen, als Versinnlichungsmitteln vorzunehmender Operationen, findet man häufig Gebrauch gemacht bey Reductionen und bey der Subtraction, Multiplication und Division von Polynomien.

Ist z. B. die Subtraction $a - (b - c)$ zu verrichten, so erläutern die, welche sich auf entgegengesetzte Größen berufen, ungefähr so:

Weil von einer Größe eine andere subtrahiren eben so viel ist, als zur ersteren die gleiche Gegengröße der zweyten addiren, so ist $a - (b - c) = a + (-b + c) = a - b + c$.

Dagegen erläutern andere etwa so:

$a - (b - c) = a - b + c$; denn b von a subtrahirt, würde geben $a - b$; da aber hier verlangt ist, daß c Einheiten weniger, als b subtrahirt werden sollen, so müssen zur Differenz $a - b$ die c Einheiten, die nicht mit abgezogen werden sollen, addirt werden.

Ich glaube, daß die zweyte Erläuterung die erste wenigstens überflüssig mache; beyde führen übrigens zur nämlichen mechanischen Subtractions-Regel.

Der Ausdruck $a - b$ hat nur einen Sinn für $b < a$, keinen, wenn $b > a$; allein wenn wir Summen oder Differenzen neuerdings zu Summen oder Differenzen verbinden, so bekommen wir es häufig mit unmöglichen Differenzen zu thun. Dieß ist der Fall bey Reductionen, wenn nämlich mehrere Glieder eines Polynomium in eines vereiniget werden, indem die sonst bloß angezeigten Additionen und Subtractionen der Buchstabenrechnung möglich werden, wie in folgendem Beyspiele:

$$(9a - 7b) - (5a - 4b) = 9a - 7b - 5a + 4b$$

denkt man sich dieses Polynomium auf die Form einer

	Summe	oder	Differenz gebracht,
so hat man	1) $(9a - 5a) + (4b - 7b)$		2) $(9a - 5a) - (7b - 4b)$ $= 4a - 3b.$

Obwohl nun der erste Ausdruck eine unmögliche Differenz enthält, so kann man doch nicht sagen, daß er sinnlos sey (er ist es wenigstens nicht explicite, wenn auch implicite); man wird im Gegentheile leicht bemerken, daß er mit dem zweyten, mit dem er aus demselben Polynomium entstanden, gleichbedeutend sey. Die unmögliche Differenz ist in den ersten Ausdruck durch ein verkehrtes Operiren hineingekommen, und wäre leicht vermieden worden. Es ist aber eben nicht nöthig, daß sie vermieden werde; sie bietet keine Schwierigkeit dar; man bemerkt leicht, daß man, statt die unmögliche Differenz $4b - 7b$ zu addiren, nur die umgekehrte mögliche Differenz $7b - 4b$ subtrahiren, oder diese addiren dürfe, wo jene subtrahirt werden sollte.

Unmögliche Differenzen können also bey Reductionen (scheinbar) begegnen; ihre Entstehung, so wie ihre Bedeutung in Verbindung mit andern Zahlen ist klar; für sich betrachtet sind sie sinnlos. Das Resultat $4a - 3b$ muß eine mögliche Differenz seyn; eine unmögliche Differenz als Resultat würde anzeigen, daß die verlangte Verbindung nicht zu bewerkstelligen sey. Man wird daher bey weiteren Verbindungen von Differenzen, z. B. zu Producten, voraussetzen dürfen, daß die Differenzen mögliche seyen.

Die Bekenner der Lehre von den entgegengesetzten Größen betrachten $4b$ und $-7b$ als Gegengrößen, aus deren Vereinigung durch gegenseitige Destruction die $-3b$ resultire.

Man erreicht dasselbe durch Auflösung des Subtrahends in Theile, wo dann der eine Theil des Subtrahends vom Minuend abgezogen werden kann, der andere aber als subtractives Glied vorhanden bleibt. Auf keinen Fall hat man nöthig, den Zeichen + und — andere Bedeutungen, als die von Operationszeichen unterzulegen.

Bey der Multiplication hat man ebenfalls nicht nöthig, bey + und — an etwas anders, als an Operationszeichen zu denken, und schon im Begriffe von Multipliciren auf Gegengrößen und negative Zahlen anzutragen, und von einem So und so oft nehmen, oder von einem Nehmen der Gegengrößen zu sprechen. Auf isolirt stehende Ausdrücke, wie —b, führt die Buchstabenrechnung nicht, also auch nicht auf eine Multiplication derselben, und bey der Multiplication von Differenzen haben wir es nicht mit der Multiplication einer —b durch d oder —d zu thun.

Der Ausdruck (a — b) c verlangt, daß b Einheiten weniger als a...cmal genommen werden sollen. Nimmt man, statt (a — b) cmal zu nehmen, a...cmal (= ac), so hat man cmal b Einheiten (= bc) zu viel genommen, die deßhalb von ac subtrahirt werden müssen; es ist also (a — b) c = ac — bc

(a — b) (c — d) = (a — b) c — (a — b) d; denn in (a — b) c wäre der Multiplicand (a — b) .... dmal öfter wiederholt, als er wiederholt werden soll. Man hat also nicht —b mit c, oder —b mit —d, auch nicht a — b mit —d zu multipliciren, sondern a — b mit c — d; wenn man dessenungeachtet während der Operation so verfährt, als wäre —b × —d = +bd zu nehmen, so muß man nie vergessen, daß ein solches Verfahren bloßer Mechanismus ist, und wenn man bey dieser Gelegenheit von einer Regel der Zeichen spricht, so muß man dabey nicht die Meinung aufkommen lassen, als wäre eine solche Sprache richtig; Ausdrücke wie: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche —, können bloß durch das Bedürfniß der Kürze entschuldigt werden, der die Richtigkeit geopfert wurde. Je leichter aber durch solche unrichtige Ausdrücke Mißverständnisse veranlaßt werden können, desto mehr sollte man sich hüten, Begriffe von Multipliciren zu geben, die solchen Mißverständnissen Nahrung bieten.

Eben so wenig als bey der Multiplication hat man es bey der Division mit sogenannten negativen Größen oder Zahlen zu thun. Die Spuren des bey der Multiplication befolgten Mechanismus müssen zwar, gehörig verfolgt, auch auf einen ähnlichen Mechanismus bey der Division führen. Die mechanische Regel, die man sich aus der Multiplication von Polynomien für die Bildung der Partialproducte entnommen hat, muß wieder eine solche Regel für die Auffindung von Partialquotienten geben, und man wird also wohl von einer Regel der Zeichen u. dgl. auch bey

der Division sprechen, aber deßhalb muß man nicht erklären wollen, was die Division zweyer Glieder, die nicht beyde zugleich positiv (oder vielmehr absolute Zahlen) sind, bedeute.

B.

Der Zusammenhang der Größen ist entweder von der Art, daß wir ihn sogleich überschauen, und unmittelbar die Regel angeben können, nach der unbekannte Größen aus bekannten gefunden werden können, oder von der Art, daß wir zur Kenntniß dieser Regel erst durch eine Reihe von Schlüssen gelangen. Die Einfachheit der Zeichen und die Kürze des Ausdrucks gibt den algebraischen Schlüssen einen nicht unerheblichen Vorzug vor den Schlüssen in gewöhnlicher Sprache. Die Kette derselben in gewöhnlichen Ausdrücken zu verfolgen, würde eine Anstrengung des Gedächtnisses und der Einbildungskraft erfordern, der in gar vielen Fällen kein menschlicher Geist fähig seyn würde. Die Kürze des algebraischen Ausdruckes erleichtert die Verkettung der Schlüsse, und liefert ein Gemählde, dessen bloßer Anblick das Ganze viel deutlicher macht. So erheblich aber auch dieser Vorzug algebraischer Schlüsse ist, so drängte doch die Beschränktheit des menschlichen Geistes, noch wesentlichere Erleichterungsmittel aufzusuchen. In verwickelteren Fällen könnte bey aller Erleichterung durch die Kürze des algebraischen Ausdrucks die Kette der Schlüsse dennoch nur mit der äußersten Anstrengung des Verstandes hergestellt werden. Nichts war daher glücklicher, als die Idee, die man hatte, die Verkettung der algebraischen Schlüsse auf eine Art Kunstgriffe zurückzuführen, die den Geist einer fortdauernden Anstrengung entbindend, nichts weiter erfordern, als einen gewissen Mechanismus der Operationen, der leicht und schnell zum gesuchten Resultate führt. Einer dieser Kunstgriffe ist die Transposition der Glieder einer Gleichung. Überläßt man sich aber bey Auflösung einer Gleichung dem Mechanismus der Transpositionen, so erhält man häufig unmögliche Differenzen, negative Zahlen, die nicht wie die oben erwähnten in Ausdrücke verwickelt, und an größere Zahlen angeschlossen sind, sondern isolirt dastehen. Da die Wegnahme einer größern Zahl von einer kleinern oder die Wegnahme einer Zahl von 0 unmöglich ist, so können solche Zahlenausdrücke schlechterdings keine wirkliche Quantität bezeichnen. Es entsteht nun die Frage, was es für Folgen habe, wenn man durch diese oder jene Transpositionen unmögliche Differenzen erhalten hat.

Man habe die Gleichung $ax + d = bx + c$.

Weiß man, daß $b > a$ und sonach auch $d > c$ ist, so wird man daraus ableiten:

1) $\quad d - c = bx - ax$

und $\quad \frac{d - c}{b - a} = x$

Gesetzt aber, man habe unbekümmert um das Größer oder Kleiner des a, b ꝛc. daraus abgeleitet:

$$2) \quad (a-b)x = c-d$$

$$\text{und } x = \frac{c-d}{a-b}$$

so sind nun zwar a — b und c — d unmögliche Differenzen, und die Regel, nach der die unbekannte Zahl aus den bekannten gefunden werden soll, kann streng genommen nicht befolgt werden; allein, wenn man die unmöglichen Differenzen so behandelt, wie sie behandelt werden können, wenn sie mit andern Zahlen in Verbindung stehen, nämlich statt derselben die möglichen mit dem — Zeichen setzt, und dann auf isolirt stehende negative Zahlen dieselben mechanischen Operationsregeln anwendet, die auf sie anwendbar sind, wenn sie nicht isolirt stehen, so compensirt die Division den Fehler der Transposition. Wenn man annimmt, daß

$$\frac{c-d}{a-b}, \quad \frac{-(d-c)}{-(b-a)}, \quad \frac{d-c}{b-a}$$

denselben Quotienten geben, so kann man natürlich in obigen Gleichungen die ersten sinnlosen Ausdrücke — (d — c) oder c — d statt d — c ꝛc. ohne nachtheiligen Einfluß auf das Resultat setzen.

Wenn man auf beyden Seiten einer Gleichung die Zeichen ändert — was man sich als eine Multiplication mit — 1 vorstellen kann —, so erhält man entweder unmögliche Differenzen, wenn man zuvor mögliche, oder mögliche, wenn man zuvor unmögliche hatte; im ersten Falle stellt die Division am Ende, im zweyten gleich die Multiplication mit — 1 das natürliche und ursprüngliche Verhältniß der Dinge wieder her, welches in der Grundgleichung (dem algebraischen Ausdrucke einer möglichen Aufgabe) vor aller Transformation geherrscht haben muß.

Darum muß man aber nicht meinen, daß die Multiplication und Division negativer Zahlen für sich einen Sinn habe, etwa wie die Multiplication und Division absoluter Zahlen. Die Rechnung mit Formen, welche unmögliche Operationen fordern, ist eine fingirte. Solche Formen, die eben darum, weil sie unverrichtbare Operationen fordern, nicht wirklich Zahlen vorstellen, und die Rechnung damit, nach den mechanischen Regeln, die man sich aus dem Organismus des Calculs mit Formen, welche wirkliche Zahlen repräsentiren, entnommen hat, können nur darin ihre Rechtfertigung finden, daß sich an dieselben, ohne daß ein nachtheiliger Einfluß auf ein beabsichtigtes Endresultat zu besorgen wäre, die Erreichung wichtiger Zwecke, eine eben nahmhafte, als nothwendige Erleichterung der Arbeit, und die größte Allgemeinheit algebraischer Formeln knüpft; Zwecke, wichtig genug, wenn auch sonderbare, doch unschädliche Mittel zu rechtfertigen.

Vom Anfange herein die Begriffe von Summen, Differenzen u. s. w. in der Art zu steigern, und zu verfolgen, daß sie auch unmögliche Operationen fordernde Formen umfassen, mag in einem strengern Systeme geschehen; wäre aber da unzweckmäßig, wo das schwache Abstractionsvermögen der Schüler den Grundsatz erheischt, von nicht mehr abstracten Begriffen auszugehen, als die höchste Noth erfordert.

Eine Versinnlichung solcher Formen und der Operationen mit denselben durch die entgegengesetzten Größen erregt Mißverständnisse, ohne die Schwierigkeiten zu heben. Man wird doch nicht bey $-a \times -a = +a^2$ u. dgl. an entgegengesetzte Größen denken wollen? Zudem kehren bey der Rechnung mit den sogenannten imaginären Größen, die doch keine Versinnlichung mehr gestatten, die Schwierigkeiten wieder.

Vorhin wurde bemerkt, daß, wenn auch in abgeleiteten Gleichungen unmögliche Differenzen vorkommen, dennoch in der Endgleichung für die Unbekannte wirkliche Zahlen vorstellende Formen erhalten werden. Bisweilen ergibt sich aber dennoch als Resultat für x eine isolirt stehende negative Zahl; dieß ist der Fall, wenn in obiger Gleichung, wo $x = \frac{d-c}{b-a}$, die eine der Differenzen möglich, die andere unmöglich ist; wenn also eine Seite der Gleichung eine unmögliche Differenz, die andere eine mögliche geworden ist. Wenn die Grundgleichung richtig ist, so muß begreiflicher Weise durch jede Transformation, wodurch eine Seite der Gleichung eine unmögliche Differenz wird, es auch die andere werden. Ein negativer Werth für x erhalten deutet also auf eine Unrichtigkeit der Grundgleichung hin. Die Gleichung $ax + d = bx + c$ ist absurd, wenn bey $b > a$ nicht zugleich $d > c$ ist.

Führt eine Aufgabe auf eine Gleichung, aus der für x eine negative Zahl resultirt, so ist dieß ein Zeichen, daß die Aufgabe, deren genauer Ausdruck die Gleichung ist, widersprechende Bedingungen enthalte.

Obwohl nun ein negativer Werth für x eine Absurdität der in Gleichung gebrachten Aufgabe beurkundet, so kann er doch häufig zur Lösung anderer, mit der in Gleichung gebrachten zusammenhängender Aufgaben benützt, und selbst als Auflösung für die gegebene Aufgabe zugelassen werden, sobald diese so unbestimmt gestellt ist, daß andere mit darunter verstanden werden können.

Wäre, um mich eines ganz einfachen Beyspieles zu bedienen, die Frage: Wie viel Vermögen hatte der, welcher, nachdem er 5000 Gulden geerbt hat, 3000 Gulden besitzt? so müßte

A) $x + 5000 = 3000$

und $x = -2000$ seyn.

Wüßte man nicht im Voraus, daß die Bedingungen der Aufgabe unvereinbar seyen, so würde dieses der für x gefundene negative Werth anzeigen.

Hätte man gefragt: Wie viel Schulden ꝛc.? so hätte man

B) $5000 - x = 3000$

und $x = 2000$ erhalten.

Man bemerkt nun leicht, daß die erste Gleichung in die zweyte, und die Auflösung der ersten in die der zweyten übergeht, wenn man in jener $-x$ statt x setzt, denn alsdann hat man $-x = -2000$ oder $x = 2000$.

Es kann also der negative Werth von x in A absolut genommen als Auflösung einer Aufgabe betrachtet werden, die, wenn man sie in Gleichung bringt, zur Gleichung B führt, welche aus der Gleichung A erhalten wird, wenn man in derselben $-x$ statt x setzt. Durch solche Betrachtungen kann man sich oft die Mühe des Auflösens verwandter Aufgaben ersparen.

Daß aber, wie es hier der Fall ist, negative Auflösungen der Gleichungen allemal in entgegengesetzter Beziehung genommen werden müssen, um Auflösungen eines besondern Falles einer allgemeinen Aufgabe zu geben, ist eine eben so unrichtige, als oft wiederholte Behauptung. Näheres darüber in der Folge.

Bey der Lehre von den Potenzen und Wurzeln, welche auf die Gleichungen des ersten Grades folgt, müssen die unmöglichen Differenzen oder isolirt stehenden negativen Zahlen, auf welche die Behandlungsart der Gleichungen des ersten Grades führte, schon berücksichtigt werden. Hier kann aber nicht die Frage seyn, was -6×-6, oder $-a \times -a$ gebe, sondern nur, was statt $-a \times -a$ gesetzt werden könne? Es läßt sich nicht beweisen -6×-6 gebe 36, oder $-a \times -a$ gebe a^2; aber es läßt sich beweisen, daß die Annahme $-6 \times -6 = 36$, oder $-a \times -a = a^2$ nicht zu falschen Resultaten führen könne. Eine nothwendige Folge dieser Annahme aber ist dann die Zweydeutigkeit des Ausdrucks $\sqrt{a^2}$, der bald $+a$, bald $-a$ vorstellt, und daher mit Vorsicht behandelt seyn will, ohne welche diese Annahme leicht schädlich werden könnte. Es ist dieß nicht die einzige Vorsicht, welche diese Annahme nothwendig macht; den so langwierigen Streit über die Logarithmen negativer Zahlen erregte bekanntlich ein Mangel an solcher Vorsicht.

Die Zweydeutigkeit des Ausdrucks $\sqrt{a}$ ist besonders auch bey Auflösung quadratischer Gleichungen zu berücksichtigen, und ist der Grund, warum wir jeder quadratischen Gleichung zwey Wurzeln zuschreiben müssen. Bey Ausdeutung dieser Wurzeln müssen wir folgende mögliche Fälle beachten:

1) Die eine Wurzel ist positiv (absolut), die andere negativ.
2) Beyde Wurzeln sind negativ.
3) Beyde Wurzeln sind imaginär.
4) Beyde Wurzeln sind positiv.

Im ersten Falle kann nur der positive Werth von x die in Gleichung gebrachte Aufgabe lösen.

Die negativen und imaginären Werthe im zweyten und dritten Falle zeigen an, daß die in Gleichung gebrachte Aufgabe widersprechende Bedingungen enthalten müsse, daß ihr also keine Auflösung zukomme. — Wie solche Werthe, imaginäre eben so wohl, als negative, häufig zur Auflösung anderer Fälle einer allgemeinen Aufgabe benutzt werden können, davon wird gleich nachher die Rede seyn.

Im vierten Falle muß aus andern Bedingungen der Aufgabe, als denen, die während der Auflösung der Gleichung berücksichtigt worden, ermessen werden, ob beyde Werthe, oder nur der eine die Aufgabe lösen. Oft löset sie nur der größere Werth, oder es darf die Quadratwurzel bloß absolut genommen werden; oft löset sie aber auch nur der kleinere, oder es darf die Quadratwurzel bloß negativ genommen werden, wie bey der Auflösung folgender Aufgabe:

Aus der Zeit, die zwischen dem Augenblicke, da man einen Stein in eine Grube fallen läßt, und dem Augenblicke, da man den Schall vom Auffalle desselben auf den Boden hört, verfließt, die Tiefe der Grube zu finden.

Auflösung. Es sey die Tiefe der Grube x Fuß, der Raum, durch welchen der Stein in der ersten Sekunde fällt, g Fuß, der Weg des Schalles in einer Sekunde c Fuß, also die Zeit, die der Schall braucht, um durch den Raum x zu gehen, $\frac{x}{c}$ Sekunden, es sey ferner die vom Beginne des Fallens bis zu dem Vernehmen des Schalles verflossene Zeit t Sekunden, so ist die Zeit, während welcher der Stein fällt, $t - \frac{x}{c}$ Sekunden, und

$$x = g\left(t - \frac{x}{c}\right)^2$$

$$x^2 - \frac{c(2gt + c)}{g}x = -c^2t^2$$

$$x = \frac{c(2gt + c) \pm c\sqrt{c(c + 4gt)}}{2g}$$

Obwohl hier die beyden Wurzeln positiv sind, indem

$$c^2 + 4cgt\ 4g^2t^2 > c^2 + 4cgt$$

$$c + 2gt > \sqrt{c(c + 4gt)}$$

$$c(c + 2gt) > c\sqrt{c(c + 4gt)},$$

so kann doch nur $x = \frac{c(2gt + c) - c\sqrt{c(c + 4gt)}}{2g}$ die Aufgabe lösen, weil die Grund-

gleichung voraussetzt, daß $t > \frac{x}{c}$ oder $x < ct$ sey. Nun wäre schon $x = \frac{c(2gt + c)}{2g}$ $= ct + \frac{c^2}{2g} > ct$, daher hier nur das — vor dem Wurzelzeichen genommen werden kann.

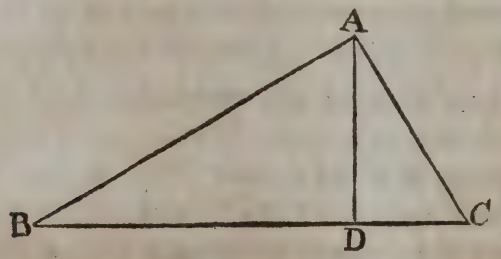
Der eine Werth von x, nämlich: $\frac{c(2gt + c) + c\sqrt{c(c + 4gt)}}{2g}$ würde eine Aufgabe lösen, deren Gleichung wäre $x = g\left(\frac{x}{c} - t\right)^2$. Diese und die vorige führen zur nämlichen dritten $x^2 - \frac{c(2gt + c)}{g} x = -c^2t^2$. Während aber die erstere voraussetzt, daß $t > \frac{x}{c}$ sey, setzte die zweyte das Gegentheil $\frac{x}{c} > t$, oder $x > ct$ voraus, daher für die zweyte $x = \frac{c(2gt + c)}{2g} - \frac{c\sqrt{c(c + 4gt)}}{2g} = ct + \frac{c^2}{2g} - \frac{c\sqrt{(c^2 + 4gt)}}{2g}$ zu klein, nämlich kleiner als ct ausfallen würde.

Ist $g = 15$, $c = 1040$, $t = 10$, so erhält man, wenn man vor dem Wurzelzeichen nur — gelten läßt, die Tiefe der Grube $x = 1182$ Fuß.

Hätte man die Quadratwurzel absolut genommen, so hätte man die Tiefe der Grube ganz unrichtig zu 91724 Fuß erhalten.

Wegen des Umstandes, daß nur die negative □ Wurzel genommen werden darf, die absolute aber verworfen werden muß, ist besonders folgende geometrische Aufgabe, die ursprünglich von Newton herrührt, berühmt geworden:

Aus der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreyeckes, und aus der Summe der Katheten und des vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällten Perpendikels, die Größe dieses Perpendikels und der Katheten zu finden.



Auflösung: Es sey im Dreyecke BAC die gegebene Hypotenuse $BC = a$, die gegebene Summe $AB + AC + AD = b$, $AD = x$, $AB = y$, also $AC = b - x - y$, so ist

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, oder I) $a^2 = y^2 + (b - x - y)^2$.

Ferner ist, weil $\triangle BAC \sim \triangle ACD$,

$BC : AB = AC : AD$,

oder $a : y = b - x - y : x$; also II) $ax = y(b - x - y)$.

Addirt man I. und II., nachdem man vorher II. mit 2 multiplicirt hat, so erhält man

$$a^2 + 2ax = b^2 - 2bx + x^2,$$

und daraus $$x = a + b \pm \sqrt{2a(a+b)}.$$

Hiernach hätte x zwey verschiedene Werthe, welche beyde positiv wären, da

$b > a$

$b^2 > a^2$

$a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + 2ab + a^2$

$a + b > \sqrt{2a(a+b)}$.

Es darf aber hier nur $x = a + b - \sqrt{2a(a+b)}$ genommen werden, weil die Grundgleichungen und alle Bedingungen der Aufgabe $b > a$ voraussetzen. Ueberhaupt gehört $x = a + b - \sqrt{2a(a+b)}$ für alle Aufgaben und Gleichungen, die entweder $x < a$ oder $x < b$ oder $x < a + b$ voraussetzen; kann dagegen nicht genommen werden bey Aufgaben und Gleichungen, die entweder $x > a$ oder $x > b$ voraussetzen.

Nähme man für x den Werth $a + b + \sqrt{2a(a+b)}$, und setzte man diesen Werth in II. statt x, um y zu finden, so erhielte man

$$y = \frac{-a - \sqrt{2a(a+b)} \pm \sqrt{\left(-a^2 - 2ab - 2a\sqrt{2a(a+b)}\right)}}{2}.$$

Man erhielte also für x imaginäre Werthe.

Setzt man dagegen in II. $a + b - \sqrt{2a(a+b)}$ statt x, so erhält man

$$y = \frac{-a + \sqrt{2a(a+b)} \pm \sqrt{\left(-a^2 - 2ab + 2a\sqrt{2a(a+b)}\right)}}{2};$$

wo der eine Werth für AB, der andere für AC gehört.

Die Aufgabe: Aus dem Perimeter p eines rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreyeckes dessen Katheten zu finden, befindet sich im nämlichen Falle.

Hier ist $(p - 2x)^2 = 2x^2$

$x^2 - 2px = -\frac{1}{2}p^2$

$x = p \pm \sqrt{\frac{1}{2}p^2} = p \pm \frac{1}{2}p\sqrt{2}$.

Es muß aber auch hier $p + \frac{1}{2}p\sqrt{2}$ verworfen werden, weil die Grundgleichung $p > 2x$ oder $x < \frac{1}{2}p$ voraussetzt; dieser Werth von x würde die Aufgabe lösen, deren Gleichung $(2x - p)^2 = 2x^2$ wäre, welche ebenfalls zur Gleichung $x^2 - 2px = -\frac{1}{2}p^2$ führte, jedoch voraussetzte, daß $2x > p$ oder $x > \frac{1}{2}p$ seyn müsse, und deßhalb $x = p - \frac{1}{2}p\sqrt{2} < \frac{1}{2}p$ nicht gestattete.

Hätte man gleich aus

$(p - 2x)^2 = 2x^2$ abgeleitet

$p - 2x = x\sqrt{2}$,

so hätte man ebenfalls erhalten

$$x = \frac{p}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2p - p\sqrt{2}}{2} = p - \frac{1}{2}p\sqrt{2}.$$

C.

Wenn man die algebraischen Formeln mehrerer besonderer Fälle einer allgemeinen Aufgabe, in welchen man für die correspondirendrn Größen die nämlichen Symbole beybehalten hat, mit einander vergleicht, so findet man, daß sie sich nur durch die Zeichen + und − in einigen ihrer Glieder unterscheiden, und daß die algebraische Formel des einen Falles in die der andern Fälle übergeht durch eine bloße Aenderung dieser Zeichen, oder durch einfache Substitutionen, welche diese Veränderung bewirken.

Man habe für zwey verschiedene Fälle einer allgemeinen Aufgabe die Gleichungen:

1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$ 2) $c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \qquad x = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a},$$

so geht die Gleichung 1 in die Gleichung 2, und die Auflösung der 1. in die der 2. über, wenn man $-x$ statt x, oder $-a$ statt a setzt;

oder man habe

1) $x^2 + nx = 2br$ 2) $x^2 - nx = 2br$

$$x = \frac{-n \pm \sqrt{(8br + n^2)}}{2} \qquad x = \frac{n \pm \sqrt{(8br + n^2)}}{2},$$

so geht die Gleichung 1 in 2, und die Auflösung der 1. in die der 2. über, wenn man $-x$ statt x, oder $-n$ statt n setzt;

oder man habe:

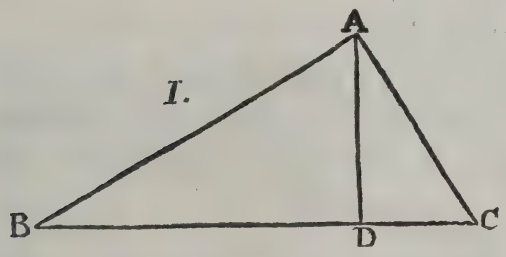
1) $x^2 - ax = -n^2$ $\quad x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - n^2)}$

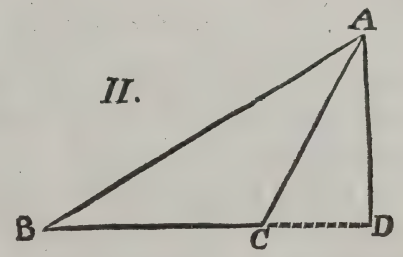
2) $x^2 - ax = n^2$ $\quad x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + n^2)}$,

so geht 1 in 2 und die Auflösung der 1. in die der 2. über, wenn man $-n^2$ statt n^2 (also $+n^2$ statt $-n^2$) oder $n\sqrt{-1}$ statt n setzt u. s. w.

Die Herleitung der Gleichung 2 eines zweyten Falles einer allgemeinen Aufgabe aus der Gleichung 1 eines andern Falles derselben, so wie die Herleitung der Auflösung der zweyten aus der der ersten Gleichung hat durchaus keine Schwierigkeit, wenn man nur weiß, welche Quantitäten in die zweyte Gleichung mit verändertem Zeichen eingehen. Es wird also jetzt angegeben werden müssen, nach welchen Kriterien diese Aenderung oder Nichtänderung der Zeichen entschieden werden könne.

Man habe die beyden Dreyecke





von deren Spitzen auf die Grundlinien Perpendikel gefällt, und die Seiten nach den gegenüberstehenden Winkeln benannt seyn mögen, so ist eine für beyde Figuren geltende Gleichung

$$c^2 - a^2 = b^2 - 2a^2 + 2a.\ BD \ldots . A.$$

Diese Gleichung vereinigt die beyden Gleichungen

1) $c^2 - a^2 = b^2 - (a - BD)\,2a$ und 2) $c^2 - a^2 = b^2 + (BD - a)\,2a$

oder $c^2 - a^2 = b^2 - CD \cdot 2a$ oder $c^2 - a^2 = b^2 + CD \cdot 2a$,

von denen die eine nur für die erste, die andere nur für die zweyte Figur gilt.

Man wird statt der Gleichung A die Gleichung 1, in welcher die 2a fache Differenz $a - BD$ subtrahirt ist, nehmen können, so oft $a > BD$; man wird aber diese nicht nehmen können, sondern die Gleichung 2 nehmen, oder die 2a fache umgekehrte Differenz $BD - a$ addiren müssen, wenn $BD > a$ ist.

Stellt man sich vor, daß die erste Figur allmählig in die zweyte übergehe, so wird die Gleichung $c^2 - a^2 = b^2 - CD \cdot 2a$ gelten, so lange $a > BD$, also $a - BD$ eine mögliche Differenz ist; man wird aber die Gleichung $c^2 - a^2 = b^2 + CD \cdot 2a$ nehmen müssen,

sobald $a < BD$ geworden. Wenn a, welches größer als BD war, kleiner als BD werden sollte, so mußte es ehevor $= BD$ geworden seyn; man mußte also $a - BD = CD = 0$ gehabt haben; CD konnte also das Zeichen nicht ändern, ohne die äußerste Gränze der Abnahme erreicht zu haben.

Gesetzt, man habe für Figur I. die Gleichung $c^2 - a^2 = b^2 - CD \cdot 2a$ gefunden. Will man nun untersuchen, welche Modificationen diese Gleichung erleiden müsse, damit sie gültig für Fig. II. werde, so darf man sich nur vorstellen, daß Fig. I. allmählig in Fig. II. übergehe, dadurch, daß sich C gegen D und darüber hinweg gegen B bewegt. So lange keine der durch a, b ꝛc. repräsentirten Größen die äußerste Gränze ihrer Abnahme erreicht hat, so lange C rechts von D bleibt, ist offenbar die gefundene Gleichung unmittelbar gültig; denn sie besteht ja unabhängig von einer bestimmten Größe der a, b ꝛc.

Setzt man statt CD in der gefundenen Gleichung den aus Fig. I. genommenen Werth $a - BD$, so daß man hat

$$c^2 - a^2 = b^2 - (a - BD)\,2a$$
$$= b^2 - 2a^2 + 2a \cdot BD,$$

so ist diese Gleichung auch noch unmittelbar giltig, wenn sich C über D hinweg gegen B bewegt hat, und Fig. I. in II. übergegangen ist, weil keine der in die Gleichung verwickelten Quantitäten beym Durchgange des Punktes C durch D 0 geworden ist. Will man aber jetzt aus letzterer Gleichung wieder herstellen

$$c^2 - a^2 = b^2 - (a - BD)\,2a,$$

so geht das nicht mehr an, weil inzwischen $a < BD$ geworden ist. Dagegen kann man herstellen

$$c^2 - a^2 = b^2 + (BD - a)\,2a$$
$$\text{oder}\quad c^2 - a^2 = b^2 + CD \cdot 2a.$$

Dadurch, daß man in der gefundenen Gleichung statt der durch 0 gehenden CD setzte $a - BD$, hat man diese Gleichung in die allgemeinere A verwandelt, aus der man leicht die speciellere Gleichung für Fig. II. entnehmen, und sich dabey überzeugen konnte, daß das Zeichen vor CD geändert werden müsse, wenn die gefundene Gleichung für Fig. II. gelten sollte. Die nämlichen Folgerungen kann man auch in andern Fällen machen.

Wenn demnach überhaupt in einer Figur $p = m - n$, und in einer andern, in die die erstere durch eine successive Bewegung ihrer Theile, die man sich als vor sich gehend vorstellt, übergehen kann, $p = n - m$, ohne daß während dieses Ueberganges m oder n durch 0 gegangen, so muß man, um aus der Gleichung für die erste Figur die Gleichung für die zweyte zu erhalten, die p mit verändertem Zeichen setzen, sie in dieser subtrahiren, wenn sie in jener

addirt, oder addiren, wenn sie in jener subtrahirt werden muß. Wenn man sich hier der Ausdrücke bedient: p ist in der ersten Figur positiv, in der zweyten negativ u. dgl., so muß man solche Ausdrücke bloß als technische betrachten, und von allem wörtlichen Sinne derselben den Gedanken abziehen.

Man kann auch haben in einer Figur $q = \frac{1}{m-n} = \frac{1}{p}$, und in einer andern, in welche die erste übergehen kann, $q = \frac{1}{n-m} = \frac{1}{-p} = -\frac{1}{p}$, dann muß man, um aus der Gleichung für die erste Figur die für die zweyte zu erhalten, das Zeichen der q ebenfalls ändern, aber in diesem Falle ist beym Uebergange der ersten Figur in die zweyte q nicht durch 0, sondern durch ∞ gegangen. Die Differenz $m - n$ mußte, um $n - m$ zu werden, 0 geworden seyn; man mußte also $q = \frac{1}{0} = \infty$ gehabt haben.

Größen, welche entweder constant sind, oder beym Uebergange einer Figur in eine andere zu- oder abnehmen, ohne die äußerste Gränze ihrer Zu- oder Abnahme zu erreichen, können nicht negativ werden. So lange keine der Größen durch 0 oder durch ∞ geht, bleibt die Gleichung für die Grundfigur für alle andern Figuren gültig, in die sie allmählig übergegangen. Der Durchgang durch 0 oder ∞ ist also, wenn auch für sich allein noch kein verlässiges Kriterium, doch eine nothwendige Bedingung der Aenderung des Zeichens einer Größe. Wenn man erkannt hat, daß eine Größe beym Uebergange einer Figur in eine andere durch 0 oder ∞ geht, so muß man, um sich zu überzeugen, ob das Zeichen, welches ihr vorhergeht, geändert werden müsse oder nicht, die Werthe derselben vor und nach dem Durchgange durch 0 oder ∞ mit einander vergleichen, und daraus auf die Aenderung oder Nichtänderung des Zeichens schließen.

Es kann gerade diejenige Größe, die in zwey speciellern Fällen einer allgemeinen Aufgabe das Zeichen ändern muß, die unbekannte; — und es können dabey die gegebenen unter Bedingungen gegeben seyn, die nur mit dem einen der speciellern Fälle vereinbar sind. Hier weiß man öfters nicht im Voraus, welche der speciellern Aufgaben, in die die allgemeine zerfällt, die gegebene sey.

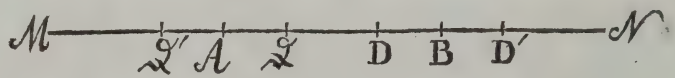
Nimmt man an, sie sey die eine, so ist diese Annahme richtig oder unrichtig; ist sie unrichtig, so wird der für x erhaltene negative, oder auch imaginäre Werth nicht bloß die Absurdität der in Gleichung gebrachten Aufgabe, oder die Unvereinbarkeit der Annahme mit den Daten beurkunden, sondern auch die Art und Weise anzeigen, wie die Annahme zu berichtigen sey.

Ist z. B. in den obigen Dreyecken $c = 100'$, $b = 60'$, $a = 75'$ gegeben, und $CD = x$ zu suchen, so erhält man, wenn man aus Fig. 1. schließt, $x = -5{,}166..$

Dieser für x erhaltene negative Werth zeigt die Unvereinbarkeit der Annahme, daß D zwischen B und C liege, mit den Daten der Aufgabe an, und gibt zugleich zu erkennen, daß x negativ werden müsse, damit $-x = -5{,}166..$ oder $x = 5{,}166..$ erhalten werde. — Soll aber die $x\ (= a - BD$ in Fig. I.) negativ werden, so muß sie durch 0 gehen und $= BD - a$ werden, d. i. Fig. I. muß in II. übergehen, oder es muß angenommen werden, daß der Perpendikel außerhalb des Dreyeckes liege.

Daß eben so, wie von negativen, auch von imaginären Werthen der Unbekannten Gebrauch gemacht werden kann, läßt sich an folgendem Beyspiele zeigen, welches Carnot so merkwürdig gefunden hat, daß er sich auf mehreren Blättern darüber verbreitet:

Auf einer geraden Linie MN, auf der das Stück AB gegeben, den Punkt D so zu bestimmen, daß das Rechteck aus den Segmenten AD und $BD = n^2$ sey.



Auflösung: Es sey $AB = a$, $AD = x$, so hat man, wenn man annimmt, daß der Punkt D zwischen A und B liege,

$$x(a - x) = n^2$$
$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - n^2)}.$$

Diese Aufgabe hat zwey Auflösungen AD und AD, wenn $n^2 < \frac{1}{4}a^2$; wenn aber $n^2 > \frac{1}{4}a^2$ gegeben ist, so sind die Wurzeln der Gleichung imaginär. Man darf aber daraus nicht schließen, daß für $n^2 > \frac{1}{4}a^2$ die gegebene Aufgabe keine Auflösung habe, sondern nur, daß die in Gleichung gebrachte keine habe, oder daß die Annahme, D liege zwischen A und B mit der Bedingung $n^2 > \frac{1}{4}a^2$ unvereinbar sey. Der für x erhaltene imaginäre Werth, welcher diese Unvereinbarkeit zu erkennen gibt, zeigt zugleich auch an, wie die Annahme zu berichtigen sey. Wenn nämlich bey $n^2 > \frac{1}{4}a^2$ der Ausdruck $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - n^2)}$ möglich werden soll, so muß das Zeichen, welches n^2 vorangeht, geändert werden, oder n^2 muß negativ, also $-n^2$ positiv werden. Soll aber $n^2\ [= x(a - x) = ax - x^2]$ negativ werden, so muß es $= x^2 - ax = x(x - a)$ werden; es muß also $x > a$ werden, oder D muß über B hinausrücken nach D; dann hat man $x(x - a) = n^2$, und

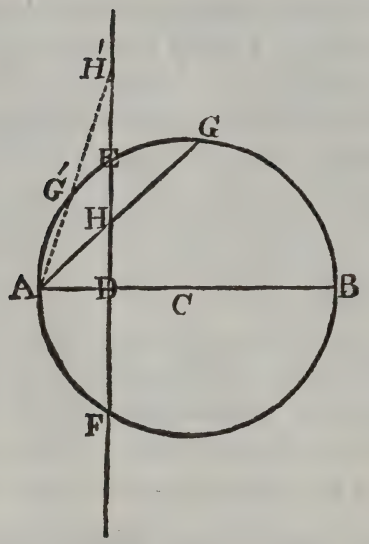
$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + n^2)};$$

wo die positive Wurzel $x = AD'$ die Aufgabe unter der Voraussetzung löset, daß D rechts von B liege; die negative aber anzeigt, daß sich vielleicht noch eine andere Voraussetzung mit den Bedingungen der Aufgabe vereinigen lasse. Untersucht man dieß auf die eben vorhin angegebene Art, so findet man, daß $x = AD'$ ebenfalls eine Auflösung der Aufgabe gebe, daß also der Punct D auch auf der Seite von A liegen könne.

Es zeigen also einerseits die negativen Gleichungswurzeln eben sowohl, als die imaginären, eine Unmöglichkeit der in Gleichung gebrachten Aufgabe an, und es können anderseits die imaginären Wurzeln eben sowohl, als die negativen, zur Lösung anderer Aufgaben benützt werden, die mit der in Gleichung gebrachten zusammenhängen; sie leiten die einen, wie die andern, zu den Modificationen, die an der Gleichung und an der Aufgabe vorgenommen werden müssen; sie können selbst die gegebene Aufgabe lösen, sobald diese so unbestimmt gegeben ist, daß die modificirte mit darunter begriffen werden kann. In vielen Fällen aber müssen die negativen und imaginären Wurzeln als ganz unbrauchbar verworfen werden.

Wenn negative Wurzeln Auflösungen von Aufgaben geben sollen, so muß gewöhnlich die Unbekannte in einem Sinne genommen werden, der dem, in welchem man sie angenommen, entgegengesetzt ist. Dieß ist der Fall in den eben angeführten Beyspielen, und ist allzeit der Fall, wenn die Unbekannte auf einer fixen Linie von einem gegebenen Anfangspuncte aus genommen werden soll. Man würde aber irren, wenn man daraus zu allgemeine Folgerungen ziehen wollte. Die negative Wurzel kann auch anders gedeutet werden müssen, wie bey der Auflösung folgender Aufgabe:

Wenn im Diameter AB eines Kreises ein Punct D gegeben ist, von dem Puncte A des Diameters eine gerade Linie so zu ziehen, daß das zwischen der Peripherie des Kreises und der durch den gegebenen Punct D des Diameters errichteten Senkrechten enthaltene Stück GH derselben $= n$ sey.



Auflösung. Es sey $AB = 2r$, $AD = b$, $AH = x$,

so ist $DH = \sqrt{(x^2 - b^2)}$

$DE = \sqrt{b(2r - b)}$

$HE = DE - DH = \sqrt{b(2r - b)} - \sqrt{(x^2 - b^2)}$

$FE = 2\sqrt{b(2r - b)}$

$FH = FE - EH = \sqrt{b(2r - b)} + \sqrt{(x^2 - b^2)}$;

ferner ist $EH : HG = AH : FH$

$$\sqrt{b(2r - b)} - \sqrt{(x^2 - b^2)} : n = x : \sqrt{b(2r - b)} + \sqrt{(x^2 - b^2)}$$

$$nx = [\sqrt{b(2r - b)} - \sqrt{(x^2 - b^2)}] \cdot [\sqrt{b(2r - b)} + \sqrt{(x^2 - b^2)}]$$

$$nx = b(2r - b) - (x^2 - b^2)$$

$$x^2 + nx = 2br$$

$$x = \frac{-n \pm \sqrt{(8br + n^2)}}{2}$$

Die positive Wurzel löset die Aufgabe. Was bedeutet aber die negative? Wenn man diese erläutern will, so muß man $-x$ statt x, oder, was auf dasselbe hinausgeht, $-n$ statt n, also auf jeden Fall $-nx$ statt nx setzen. Soll aber $nx\,[= b(2r - b) - (x^2 - b^2)]$ negativ werden, so muß es $= (x^2 - b^2) - b(2r - b)$ werden; es muß also $x^2 - b^2 > b(2r - b)$, d. i. $DH^2 > DE^2$, demnach auch $DH > DE$ werden, oder es muß H nach

H′ rücken, DH in DH′, AH in AH′ und AG in AG′ übergehen. Wenn H durch E geht, wird GH oder $n = 0$ und dann negativ, weil vor dem Durchgange durch 0

$$GH = AG - AH;$$ nach dem Durchgange 0 aber

$$G'H' = AH' - AG'.$$

HE wird ebenfalls negativ, man braucht aber darauf nicht zu sehen, weil diese Linie durch keinen der Buchstaben des Calculs ausgedrückt ist. Es wird demnach

$$x = \frac{n + \sqrt{(8br + n^2)}}{2}$$

der AH′ entsprechen. Obwohl nun hier die negative Wurzel absolut genommen die Auflösung eines besondern Falles der gegebenen Aufgabe gibt, so darf sie doch nicht im entgegengesetzten Sinne der positiven genommen werden.

Diese Aufgabe ist auch noch in anderer Hinsicht merkwürdig; sie gestattet nämlich vier Auflösungen, zwey oberhalb, und zwey unterhalb AB, obwohl ihre Gleichung, wenn man AH als die Unbekannte nimmt, nur vom zweyten Grade ist. Hätte man die Unbekannte auf der durch D errichteten Senkrechten genommen, so hätte man DH =

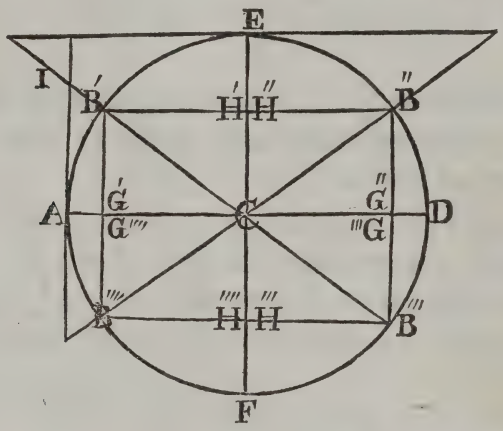
$$y = \pm\sqrt{(x^2 - b^2)} = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{-n \pm \sqrt{(8br + n^2)}}{2}\right)^2 - b^2\right\}}$$

erhalten, wo die beyden positiven Wurzeln oberhalb, und die negativen unterhalb AB zu nehmen gewesen wären. Es ist also die Zahl der Auflösungen einer Aufgabe nicht immer durch den Grad der Gleichung bestimmt.

Um keine der Auflösungen, die eine allgemeinere Aufgabe gestattet, auszulassen, wird man am besten thun, wenn man gleich Anfangs die verschiedenen speciellern Aufgaben, in die die allgemeine zerfällt, bestimmt, die Benennungen und Bezeichnungen der allgemeinern Aufgabe für jede der besondern Aufgaben beybehält, eine derselben als Normalfall heraushebt, untersucht, welche Größen in diesem oder jenem besondern Falle die Zeichen ändern müssen, bloß den Normalfall auflös't, und aus der Auflösung desselben durch die gehörigen Substitutionen die Auflösungen der übrigen Fälle herleitet. Dabey ist man aller Mühe des Ausdeutens negativer und imaginärer Wurzeln überhoben; diese sind immer Anzeigen, daß die jedesmalige besondere Aufgabe keine Auflösung gestatte.

Wollte man jede einzelne Aufgabe besonders behandeln, wie den Normalfall, so hätte man durchaus nichts mit positiven und negativen Größen zu schaffen.

Der Vortheil des Verfahrens, aus der Formel eines Normalfalles die Formeln für andere Fälle herzuleiten, spricht sich besonders in der Trigonometrie sehr deutlich aus. Das häufige Vorkommen trigonometrischer Formeln, und das eben so häufige Übertragen derselben von einem Falle auf andere Fälle, macht es nothwendig, speciellere Regeln aufzusuchen, nach welchen man jedesmal sogleich über das + und — der trigonometrischen Linien entscheiden kann. Bey Aufsuchung dieser Regeln werde ich mich auf folgende Figur



beziehen, in welcher die Bedeutung der einzelnen Linien für sich klar ist, und die Winkel, welche der bewegliche Schenkel CB, nach und nach durch die vier Quadranten gehend, mit dem unbeweglichen CA macht, durch φ', φ'', φ''', φ'''' bezeichnet werden mögen.

Als Normalfall nimmt man denjenigen, in welchem ACB spitz ist. — Es wird nun vorerst untersucht werden müssen, welche Veränderungen an Gleichungen vorgenommen werden müssen, in welche die trigonometrischen Linien Sinus, Cosinus, Quer-Sinus ꝛc. des spitzigen Winkels ACB verwickelt sind, wenn diese Gleichungen auch noch für den Fall gelten sollen, da ACB stumpf ist; bey welchen der genannten Linien in den Gleichungen die Vorzeichen zu ändern sind, bey welchen nicht. Um darüber entscheiden zu können, stellte man sich vor, der Punct B gehe allmählig von B′ nach B″, und beobachte die Linien, die bey diesem Übergange 0 oder ∞ werden; denn diese letzteren allein können nach dem, was oben erinnert worden, negativ werden. Ob sie es wirklich werden, oder nicht, wird man leicht aus der Vergleichung ihrer Werthe vor und nach dem Durchgange durch 0 oder ∞ abnehmen können. — Hat man untersucht, wie die trigonometrischen Linien stumpfer Winkel beschaffen sind, so kann man diese wieder mit den trigonometrischen Linien des dritten Quadranten u. s. w. vergleichen. Die Unter-

suchungen lassen sich sehr abkürzen, wenn einmal über das + und — einiger dieser Linien entschieden ist, weil dadurch das der übrigen bedingt ist. Ich will die Linien einzeln betrachten.

Der Quer-Sinus bleibt durchaus positiv; er geht, während der bewegliche Schenkel durch die vier Quadranten geht, weder durch 0 noch durch ∞.

Der Quer-Cosinus geht beym Übergange des beweglichen Schenkels aus dem ersten Quadranten in den zweyten durch 0; da aber vor dem Durchgange durch 0

$$\text{cos. vers. } \varphi' = CE - CH'$$

und nach dem Durchgange durch 0

$$\text{cos. vers. } \varphi'' = CE - CH'',$$

da diese Differenz nicht verkehrt wird, so bleibt der Quer-Cosinus nach dem Durchgange durch 0 positiv. Bey dem Durchgange des beweglichen Schenkels durch die übrigen Quadranten wird der Quer-Cosinus weder 0 noch ∞. Er bleibt also durchaus positiv. — Formeln, in welche sin. vers. φ, cos. vers. φ verwickelt sind, gelten also ohne Änderung der Zeichen auch dann noch, wenn der Winkel φ stumpf oder erhaben ist (es müßte denn seyn, daß eine andere in der Gleichung vorkommende Größe negativ würde).

Der Cosinus geht beym Uebergange des beweglichen Schenkels in den zweyten Quadranten durch o, und wird dann negativ, weil vor dem Durchgange durch 0

$$\text{cos. } \varphi' = B'H' = CG' = AC - AG' = r - \text{sin. vers. } \varphi',$$

und nach dem Durchgange durch 0

$$\text{cos. } \varphi'' = B''H'' = CG'' = AG'' - AC = \text{sin. vers. } \varphi'' - r,$$

ohne daß r, oder sin. vers. durch 0 oder ∞ gegangen. Es muß also cos. φ mit verändertem Zeichen gesetzt werden, wenn Gleichungen, die unter der Voraussetzung, daß ACB spitzig sey, gefunden worden, für den Fall, da ACB stumpf ist, gelten sollen.

Soll z. B. aus zwey Seiten a und b, und aus dem eingeschlossenen Winkel C eines Dreyeckes (vergl. oben Fig. I. und II.) die dritte Seite c gefunden werden, so erhält man, wenn man aus Fig. I. schließt, wo C spitz, etwa $= 60°$ ist,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot CD} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos. C}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos. 60°};$$

wenn man aber aus Fig. II. schließt, wo C stumpf, etwa $= 120°$ ist,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2a \cdot CD} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos.(180° - C)}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos. 60°}$$

Diese Gleichungen erhält man, wenn man jede der beyden Aufgaben besonders behandelt; dabey ist von positiv und negativ gar keine Rede; alle Größen sind absolute. Wenn man aber bloß die erste der beyden Aufgaben auflöst, und aus der Auflösung derselben gleich die der zweyten herleiten will, so muß man $-\cos. 60°$ statt $\cos. 60°$ setzen.

Der wahre Sinn des Ausdruckes: „der Cosinus eines stumpfen Winkels ist negativ“ ist demnach dieser: Die Substitution von $-\cos. \varphi'$ statt $\cos. \varphi'$ macht eine Formel, die nur gefunden worden ist unter der Voraussetzung, daß φ spitz sey, und die unmittelbar und ohne Modification nur unter dieser Voraussetzung gilt, auch noch für die Voraussetzung gültig, daß der genannte Winkel stumpf sey. So sind Ausdrücke zu verstehen, wie folgende: $\cos. 120° = -\cos. 60°$, $\cos.(2R - \varphi) = -\cos. \varphi$, oder $\cos. \varphi'' = -\cos. \varphi'$ (wenn φ' als das spitze Supplement von φ'' gedacht wird). Es beziehen sich aber solche Ausdrücke nur auf das Uebertragen der Formeln von einem Falle auf einen andern; sieht man davon ab, so ist $\cos. 120° = \cos. 60°$ und $\log. \cos. 120° = \log. \cos. 60°$, und nicht imaginär.

Der Cosinus eines erhabenen Winkels zwischen 180° und 270° ist ebenfalls negativ, weil beym Uebergange von B aus B″ nach B‴ der Cosinus weder durch 0, noch durch ∞ geht. Mit dem Cosinus des zweyten Quadranten verglichen, wäre der Cosinus des dritten Quadranten positiv. — Führt man B aus B‴ nach B⁗, so wird der Cosinus 0, wenn B durch F geht, und da man vor dem Durchgange durch 0 hat

$$\cos. \varphi''' = CG''' = AG''' - AC = \text{sin. vers. } \varphi''' - r,$$

nach dem Durchgange durch 0 aber

$$\cos. \varphi'''' = CG'''' = AC - AG'''' = r - \text{sin. vers. } \varphi'''',$$

ohne daß r oder sin. vers. $\varphi = 0$ oder ∞ geworden, so ist $\cos. \varphi''''$ negativ in Vergleich mit $\cos. \varphi'''$; also positiv in Vergleich mit $\cos. \varphi'$. Es ist für sich klar, daß $\cos. \varphi^{v}$ wieder positiv u. s. w. Man wird also die Regel aussprechen können: Der Cosinus ist positiv, wenn er links vom Diameter EF, negativ, wenn er rechts liegt.

Der Sinus bleibt im zweyten Quadranten positiv, weil er beym Uebergange des Punktes B aus B′ nach B″ weder 0 noch ∞ wird. Beym Uebergange des Punktes B aus B″ nach

B''' wird der Sinus 0, wenn B durch D geht, und dann negativ, weil vor dem Durchgange durch 0

$$\text{sin. } \varphi'' = B''G'' = CH'' = CE - EH'' = r - \text{cos. vers. } \varphi'',$$

und nach dem Durchgange 0

$$\text{sin. } \varphi''' = B'''G''' = CH''' = EH''' - CE = \text{cos. vers. } \varphi''' - r,$$

ohne daß inzwischen r oder cos. vers. durch 0 oder ∞ gegangen.

Der Sinus bleibt negativ beym Uebergange des Punktes B aus B''' nach B'''', weil er weder durch 0 noch durch ∞ geht. Im fünften Quadranten wird der Sinus wieder positiv u. s. w. Hieraus ergibt sich die Regel: Der Sinus ist positiv oberhalb, negativ unterhalb des Diameters AD.

Durch den Sinus und Cosinus sind die übrigen trigonometrischen Linien bestimmt, und durch den Wechsel der Zeichen des Sinus und Cosinus ist auch der der übrigen Linien bedingt. Es ist nämlich

$$\text{tang. } \varphi' = \frac{\text{sin. } \varphi'}{\text{cos. } \varphi'}.$$

Soll diese Formel, die unter der Voraussetzung gefunden ist, daß der Winkel φ spitz sey, auch für die Voraussetzung gelten, daß φ stumpf sey, so muß nach dem Vorhergehenden $-\text{cos. } \varphi'$ statt $\text{cos. } \varphi'$ gesetzt werden; es ist also

$$\text{tang. } \varphi'' = \frac{\text{sin. } \varphi'}{-\text{cos. } \varphi'} = -\frac{\text{sin. } \varphi'}{\text{cos. } \varphi'} = -\text{tang. } \varphi';$$

eben so ist

$$\text{tang. } \varphi''' = \frac{-\text{sin. } \varphi'}{-\text{cos. } \varphi'} = \frac{\text{sin. } \varphi'}{\text{cos. } \varphi'} = \text{tang. } \varphi'$$

$$\text{tang. } \varphi'''' = \frac{-\text{sin. } \varphi'}{\text{cos. } \varphi'} = -\frac{\text{sin. } \varphi'}{\text{cos. } \varphi'} = -\text{tang. } \varphi'.$$

Aus der Vergleichung dieser Werthe der Tangenten ergibt sich, daß sie positiv im ersten und dritten, negativ im zweyten und vierten Quadranten, und aus der Vergleichung der Figur, daß sie positiv oberhalb, negativ unterhalb des Diameters AD genommen werden müsse. Auch der jedesmal nothwendige Durchgang der Tangente durch ∞ oder durch 0 vor der Aenderung des Zeichens ist aus diesen Formeln, in denen abwechselnd Nenner und Zähler durch 0 gehen, eben sowohl, als aus der Figur ersichtlich.

Da $\sec. \varphi' = \frac{1}{\cos. \varphi'}$,

so ist $\sec. \varphi'' = \frac{1}{-\cos. \varphi'} = -\frac{1}{\cos. \varphi'} = -\sec. \varphi'$

$\sec. \varphi''' = \frac{1}{-\cos. \varphi'} = -\sec. \varphi'$

$\sec. \varphi'''' = \frac{1}{\cos. \varphi'} = \sec. \varphi'$.

Durch die Vergleichung dieser Werthe der Secante überzeugt man sich, daß sie negativ im zweyten und dritten Quadranten genommen werden müsse, welches auch ihre Lage und Richtung seyn mag. Aus der Vergleichung der Figur ergibt sich die Regel: Die Secante ist positiv, wenn der bewegliche Schenkel vorwärts, negativ, wenn er rückwärts verlängert werden muß, um die Tangente zu schneiden.

Auf dieselbe Art lassen sich auch die Regeln für das + und — der Cotangenten und Cosecanten auffinden. Die sämmtlichen Regeln können dann etwa auf zwey gebracht werden; eine für den Sinus, den Cosinus, die Tangente und die Cotangente, und eine für die Secante und Cosecante. So ergibt sich das als Regel für die Aenderung der Zeichen der trigonometrischen Linien, was sonst als Grund dieser Aenderung angeführt wird.

Man pflegt sonst das + und — der trigonometrischen Linien aus einem Gegensatze der Linien zu eruiren. So sollen der Cosinus oder die Tangente eines spitzen und eines stumpfen Winkels, weil sie entgegengesetzt gelegen oder gerichtet sind, entgegengesetzte Größen, d. i. Größen seyn, die vereinigt einander vermindern, und deßhalb mit verschiedenen Zeichen gesetzt werden müssen. Die Schwierigkeit, einen solchen Gegensatz der Linien begreiflich zu machen, ist nicht unerheblich. Glaubt man aber auch darüber im Reinen zu seyn, so will sich wieder das + und — der Secanten und der Cosecanten nicht fügen; die Secanten spitzer und erhabener Winkel zwischen 180° und 270° wollen Gegengrößen seyn, obgleich sie in Lage und Richtung übereinkommen. Auf der andern Seite verschmäht der constante Radius jede Aenderung des Zeichens, und protestirt beharrlich gegen die Ehre, eine Gegengröße zu seyn, welches auch seine Lage und Richtung seyn mag.